Grado en Matemáticas – Examen de Análisis Funcional

1. (1,25 puntos) Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define el funcional $\varphi : \ell_1 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(n) \quad (x \in \ell_1)$$

   a) Calcula la norma de φ.

   b) Indica una condición que debe cumplir la sucesión $a \in \ell_\infty$ para que φ alcance su norma.

2. (1,25 puntos) Sea $C[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la norma $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t \ (x \in C[0,1])$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\varphi_n(x) = n \int_0^{\frac{1}{n}} x(t) \, \mathrm{d}t \quad (x \in C[0,1])$$

   a) Prueba que φ_n es continuo y calcula su norma.

   b) Prueba que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente al funcional lineal $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x) = x(0)$ para toda $x \in C[0,1]$. Prueba que φ es discontinuo.

3. (1,25 puntos) Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(4n) - x(4n-2) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcula la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre M y sobre $M^\perp$.

4. (1,25 puntos) Sea $p > 1$ y $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y \in \ell_p$ la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)y(n)$ tiene sumas parciales acotadas. Prueba que $x \in \ell_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. (0,5 puntos cada una) Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, indicando el resultado de teoría que lo justifica, o proporcionando una prueba o un contraejemplo.

   a) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

   b) Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Supongamos que para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \ker(T^n)$. Entonces existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$.

   c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

   d) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $T_n : c_0 \to c_0$ definido por $T_n(x) = x(n)e_n$. Entonces $T_n \in L(c_0, c_0)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a cero pero no converge a cero en $L(c_0, c_0)$.

6. (3 puntos) Responde a uno de los siguientes temas.

   a) Espacios normados de dimensión finita. Teorema de Hausdorff (unicidad de la topología de la norma). Consecuencias. Teorema de Riesz (compacidad local).

   b) Espacios de Hilbert. Aproximación óptima a un convexo. Ortogonalidad. Teorema de la proyección ortogonal. Teorema de Riesz-Frechet.

   c) Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Pondré las calificaciones en el SWAD. Revisión de exámenes el próximo día 19 de 10h a 12h en mi despacho.

Granada, 12 de febrero de 2019